第七章　随机变量及其分布

7.1　条件概率与全概率公式

7.1.1　条件概率

1. C　【解析】第一关闯关成功的选手有70人，则第一关闯关成功的频率为0.7，
第一关闯关成功且第二关闯关也成功的选手有63人，则两关都成功的频率为0.63.
设“第一关闯关成功”为事件A，“第二关闯关成功”为事件B，则$P(A)=0.7$，$P(AB)=0.63$，
某个选手第一关闯关成功，则该选手第二关闯关成功的概率为$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.9$. 故选C.

2. C　【解析】设“第一次抽到选择题”为事件A，“第二次抽到填空题”为事件B.
$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(AB)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$，
所以$P(B|A)=\frac{2}{5}$（另解：不放回抽取且第一次抽到了选择题，那么还剩下3道选择题和2道填空题，第二次抽到填空题的概率即为$\frac{2}{5}$）.

3. A　【解析】设“该技术难题被攻克”为事件A，“甲科研小组攻克了该技术难题”为事件B，
$P(A)=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$，
而$P(AB)=\frac{2}{3}$，
所以所求概率$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{5}$.

4. D　【解析】因为$P(\overline{N}|M)=0.5$，由对立事件概率计算公式可得$P(N|M)=1-0.5=0.5$，则$P(MN)=P(M)P(N|M)=0.4\times0.5=0.2$. 故选D.

5.【解】设事件A为“学生甲和乙都不是第一个出场，且甲不是最后一个出场”，

事件 B 为“学生丙第一个出场”，

对于事件 A，可分为两类，

第一类：乙最后一个出场，则优先从中间4个位置中选1个给甲，再将余下的4个人全排列，有 $C_4^1A_4^4=96$（种）演讲顺序；

第二类：乙不是最后一个出场，则优先从中间4个位置中选2个给甲和乙，再将余下的4个人全排列，有 $A_4^2A_4^4=288$（种）演讲顺序，

故 $n(A)=96+288=384$.

对于事件 AB，此时丙第一个出场，优先从除了甲和丙以外的4人中选1人安排在最后，再将余下的4人全排列，有 $C_4^1A_4^4=96$（种）演讲顺序，

故 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{96}{384}=\dfrac{1}{4}$.

6. C 【解析】事件 A 含有的样本点数为 $1+2+3+4+5=15$（提示：蓝骰子点数为2有1种，为3有2种，为4有3种，为5有4种，为6有5种），

事件 AB 含有红骰子点数为1且蓝骰子点数为5和红骰子点数为2且蓝骰子点数为4共2个样本点，所以 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{2}{15}$. 故选C.

7. A 【解析】甲被派去 B 物资发放点有两种情况：

①甲一个人去 B 物资发放点，则有 $C_3^2A_2^2=6$（种）方法；

②甲和其中一人去 B 物资发放点，则有 $C_3^1A_2^2=6$（种）方法. 故甲被派去 B 物资发放点的方法数为 $6+6=12$.

甲、乙被派去同一个物资发放点的方法数为 $A_2^2=2$.

故所求条件概率为 $\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$. 故选A.

8. A 【解析】记“买到甲厂产品”为事件 A，“买到合格产品”为事件 B，则 $P(A)=0.7$，$P(B|A)=0.95$，

所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.7\times0.95=0.665$. 故选A.

9. B 【解析】记事件 A 为“第一次摸出红球”，事件 B 为“第二次摸出黄球”，

则 $P(A)=\dfrac{2}{5}$，$P(B|A)=\dfrac{1}{2}$，则

$P(AB)=P(B|A)\times P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$. 故选 B.

10. A 【解析】由题意，$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{1}{3}$. 由 A,B 是互斥事件知，$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$，所以 $P(A|C)=P(A\cup B|C)-P(B|C)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. 故选 A.

11. 【解】设“第 1 次抽到舞蹈节目”为事件 A，“第 2 次抽到舞蹈节目”为事件 B，则“第 1 次和第 2 次都抽到舞蹈节目”为事件 AB.

(1) 根据题意，从 6 个节目中不放回地依次抽取 2 个节目，该试验的样本空间 Ω 包含的样本点个数 $n(\Omega)=A_6^2=30$，

根据分步乘法计数原理，得 $n(A)=A_4^1A_5^1=20$，

于是 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

(2) 因为 $n(AB)=A_4^2=12$，

所以 $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$.

(3) 方法一：由 (1)(2) 可得，在第 1 次抽到舞蹈节目的条件下，第 2 次抽到舞蹈节目的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$.

方法二：因为 $n(AB)=12$，$n(A)=20$，

所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

12. D 【解析】因为 A 与 C 互斥，故 $A\subseteq\overline{C}$，进而 $AB\subseteq\overline{C}$，

所以 $P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)}{P(\overline{C})}=\frac{3}{4}$. 故选 D.

7.1.2 全概率公式

1. C 【解析】设事件 A 为“第一次抽取的是黑球”，事件 B 为“第二次抽取的是黑球”，则 $B=AB+\overline{A}B$. 由全概率公式得

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$. 由题意知 $P(A)=\frac{b}{a+b}$, $P(B|A)=\frac{b+c}{a+b+c}$, $P(\overline{A})=\frac{a}{a+b}$, $P(B|\overline{A})=\frac{b}{a+b+c}$, 所以 $P(B)=\frac{b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{b}{a+b}$.

2. C 【解析】记"从甲盒中取出 2 个红球"为事件 C_1,"从甲盒中取出 2 个白球"为事件 C_2,"从甲盒中取出 1 个红球和 1 个白球"为事件 C_3,"从乙盒中取出的 2 个球均为红球"为事件 D. 显然,事件 C_1,C_2,C_3 两两互斥,且 C_1,C_2,C_3 为样本空间 Ω 的一个完备事件组,由全概率公式得 $P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(C_i)P(D|C_i)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^2}{C_5^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{37}{100}$,故从甲盒中取出 2 个小球放入乙盒中,再从乙盒中取出 2 个小球,这 2 个小球均为红球的概率为$\frac{37}{100}$.

3. $\frac{13}{30}$ 【解析】因为 $P(A)=\frac{3}{5}$,所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. 因为 $P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{2}{3}$,所以 $P(B|\overline{A})=1-P(\overline{B}|\overline{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,所以由全概率公式可得 $P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})\cdot P(\overline{A})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{30}$.

4. $\frac{13}{16}$ 【解析】设"小王从这 8 道题中任选 1 道,且做对"为事件 A,"选到能完整做对的 4 道题"为事件 B,"选到有思路的 3 道题"为事件 C,"选到完全没有思路的 1 道题"为事件 D,则 $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{3}{8}$, $P(D)=\frac{1}{8}$.

由全概率公式可得 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)+P(D)P(A|D)=$

$\frac{1}{2}\times1+\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}$.

5. B 【解析】记事件 A 表示"从剩下的 9 箱书中随机打开 2 箱，结果是 1 箱语文书、1 箱数学书"，事件 B_1 表示"丢失的 1 箱是语文书"，事件 B_2 表示"丢失的 1 箱是数学书"，事件 B_3 表示"丢失的 1 箱是英语书"，

则 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{1}{2}\times\frac{4\times3}{C_9^2}+\frac{3}{10}\times\frac{5\times2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\times\frac{5\times3}{C_9^2}=\frac{1}{3}$,

$P(AB_3)=P(B_3)P(A\mid B_3)=\frac{1}{5}\times\frac{5\times3}{C_9^2}=\frac{1}{12}$，由贝叶斯公式可得 $P(B_3\mid A)=\frac{P(AB_3)}{P(A)}=\frac{1}{12}\times3=\frac{1}{4}$. 故选 B.

6. A 【解析】用 A_1,A_2,A_3 分别表示取得的这盒 X 光片是由甲厂、乙厂、丙厂生产的，B 表示取得的 X 光片为次品，

由题意得，$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{3}{10}$,

$P(A_3)=\frac{1}{5}$,

$P(B\mid A_1)=\frac{1}{10}$，$P(B\mid A_2)=\frac{1}{15}$，$P(B\mid A_3)=\frac{1}{20}$.

则由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=0.08$，即 $p_1=0.08$.

由贝叶斯公式得 $P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}}{0.08}=0.625$，即 $p_2=0.625$.

7. A 【解析】设 A_1,A_2,A_3 分别表示产品出自甲、乙、丙车间，B 表示产品为次品，易知 A_1,A_2,A_3 是样本空间的一个完备事件组，且有 $P(A_1)=0.45$，$P(A_2)=0.35$，$P(A_3)=0.2$，$P(B\mid A_1)=0.04$，$P(B\mid A_2)=0.02$，$P(B\mid A_3)=0.05$.

由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.45\times0.04+0.35\times0.02+0.2\times0.05=0.035$.

由贝叶斯公式得 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.45\times0.04}{0.035}\approx0.514$,

$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.02}{0.035}=0.2$,

$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.05}{0.035}\approx0.286$,

因为 $0.514>0.286>0.2$,

所以该次品最大可能出自车间甲.

8. C 【解析】设从甲袋中取出 2 个球,其中红球的个数为 i 为事件 $A_i(i=0,1,2)$,事件 A_i 的概率为 $P(A_i)$,

从乙袋中取出 2 个球,其中红球的个数为 2 为事件 B,事件 B 的概率为 $P(B)$,由题意知

①$P(A_0)=\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$, $P(B|A_0)=\dfrac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$;

②$P(A_1)=\dfrac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$, $P(B|A_1)=\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$;

③$P(A_2)=\dfrac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$, $P(B|A_2)=\dfrac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$;

所以 $P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{15}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{16}{75}$.

所以 $P(A_2|B)=\dfrac{P(BA_2)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}}{\frac{16}{75}}=\dfrac{3}{8}$,

即已知从乙袋中取出的是 2 个红球,则从甲袋中取出的也是 2 个红球的概率为 $\dfrac{3}{8}$.

7.2 离散型随机变量及其分布列

1. A 【解析】因为 X 服从两点分布，且 $P(X=1)=0.4$，所以 $P(X=0)=1-P(X=1)=0.6$. 故选 A.

2. B 【解析】依题意可得 $P(X=1)+P(X=0)=1$. 又 $P(X=1)-P(X=0)=0.32$，所以 $P(X=0)=\dfrac{1-0.32}{2}=0.34$. 故选 B.

3. B 【解析】由离散型随机变量分布列的性质可得 $\dfrac{1}{2}+1-2q+3q^2-q+\dfrac{1}{6}=1$，

即 $(3q-1)(3q-2)=0$，

解得 $q=\dfrac{1}{3}$ 或 $q=\dfrac{2}{3}$，

当 $q=\dfrac{2}{3}$ 时 $1-2q<0$，不符合题意，舍去

（提示：一定要注意概率的值非负），

所以 $q=\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

4. C 【解析】因为 $P(X\leqslant m)=a$，$P(X\geqslant n)=b$，$n<m$，

所以 $P(n\leqslant X\leqslant m)=P(X\leqslant m)-P(X<n)=P(X\leqslant m)-[1-P(X\geqslant n)]=a-(1-b)=a+b-1$. 故选 C.

5. C 【解析】由分布列可得 $m+2n=0.8$.

又当 $m>0$，$n>0$ 时，$m+2n=0.8\geqslant 2\sqrt{2mn}$，所以 $mn\leqslant 0.08$，

当且仅当 $m=2n=0.4$，即 $m=0.4$，$n=0.2$ 时，等号成立.

当 $m=0$ 或 $n=0$ 时，$mn=0$.

故 mn 的最大值为 0.08. 故选 C.

6. B 【解析】$\sum\limits_{k=0}^{3}P(k)+0=\dfrac{c}{2}+\dfrac{c}{6}+\dfrac{c}{12}+\dfrac{c}{20}=1\ (k\in\mathbf{N})$，所以 $c=\dfrac{5}{4}$，所以 $P(0)=\dfrac{1}{2}\times c=\dfrac{5}{8}$. 故选 B.

7.【解】(1) 由题意，甲队进入决赛的概率为 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{5}$，

乙队进入决赛的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$，

丙队进入决赛的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{9}$，

显然甲队进入决赛的概率最大,所以甲队进入决赛的可能性最大.

(2)由(1)可知,甲、乙、丙三队进入决赛的概率分别为$\frac{3}{5}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{5}{9}$,随机变量ξ的所有可能取值为0,1,2,3,

可得$P(\xi=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{4}{45}$,

$P(\xi=2)=\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{9}+\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{5}{9}\right)=\frac{37}{90}$,

$P(\xi=3)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{6}$,

$P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=2)-P(\xi=3)=1-\frac{4}{45}-\frac{37}{90}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{1}{6}$

8.【解】由$Y=\sin\frac{X}{2}\pi$得,

当$X=1$或$X=5$时,$Y=1$;

当$X=2$或$X=4$或$X=6$时,$Y=0$;

当$X=3$时,$Y=-1$.

则$P(Y=1)=P(X=1)+P(X=5)=\frac{1}{2}+\frac{1}{32}=\frac{17}{32}$,

$P(Y=0)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$,

$P(Y=-1)=P(X=3)=\frac{1}{8}$,

所以随机变量Y的分布列为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{17}{32}$

9.【解】(1)由$0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$,

得$m=0.3$,

η的所有可能取值为0,1,2,3,

$P(\eta=0)=P(X=1)=0.1$,

$P(\eta=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.2+0.1=0.3$,

$P(\eta=2)=P(X=3)=0.3$,

$P(\eta=3)=P(X=4)=0.3$,

故 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

(2)由 $1<2X+1<9$,可得 $0<X<4$,

故 $P(1<2X+1<9)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.1+0.1+0.3=0.5$.

10.【解】(1)记"方程 $x^2+bx+c=0$ 没有实根"为事件 A,"方程 $x^2+bx+c=0$ 有且只有一个实根"为事件 B,"方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个相异实根"为事件 C,

则 $A=\{(b,c)\mid b^2-4c<0,b,c=1,2,3,4\}$,$B=\{(b,c)\mid b^2-4c=0,b,c=1,2,3,4\}$,$C=\{(b,c)\mid b^2-4c>0,b,c=1,2,3,4\}$.

样本空间 Ω 中的样本点总数为 16(提示:b,c 分别有 4 种取值可能),A 中的样本点总数为 9(提示:$b=1,c=1,2,3,4$;$b=2,c=2,3,4$;$b=3,c=3,4$),B 中的样本点总数为 2(提示:$b=2,c=1$;$b=4,c=4$),C 中的样本点总数为 5(提示:$b=3,c=1,2$;$b=4,c=1,2,3$).

又因为 B,C 是互斥事件,故所求概率

$P=P(B)+P(C)=\frac{2}{16}+\frac{5}{16}=\frac{7}{16}$.

(2)由题意,X 的可能取值为 0,1,2,

则

$P(X=0)=\frac{9}{16}$,$P(X=1)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$,

$P(X=2)=\frac{5}{16}$.

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

11. B 【解析】因为 $P(X=k)=\frac{m\cdot 2^k}{(2^{k+1}-1)(2^k-1)}=m\left(\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)(1\leqslant k\leqslant 5,k\in\mathbf{Z})$,且 $P(X=$

$1)+P(X=2)+\cdots+P(X=5)=1$,

故 $m\left[\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^5-1}-\frac{1}{2^6-1}\right)\right]=1$,

即 $m\left(1-\frac{1}{2^6-1}\right)=1$,所以 $m=\frac{63}{62}$,

所以 $P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=P(X=2)=\frac{63}{62}\times\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)=\frac{6}{31}$.

故选 B.

7.3 离散型随机变量的数字特征

7.3.1 离散型随机变量的均值+ 7.3.2 离散型随机变量的方差

1. ABD 【解析】由 $0.2+a+0.4+0.1=1$,解得 $a=0.3$,故 A 错误;由分布列知 $P(X\leqslant1)=0.2+0.3=0.5$,故 B 错误;$E(X)=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.1=1.4$,故 C 正确;$D(X)=(0-1.4)^2\times0.2+(1-1.4)^2\times0.3+(2-1.4)^2\times0.4+(3-1.4)^2\times0.1=0.84$,故 D 错误. 故选 ABD.

2. D 【解析】由题得 $E(X)=-1\times\left(\frac{1}{2}-a\right)+1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)+2\times\frac{a}{2}=\frac{5a}{2}$,

$E(X^2)=1\times\left(\frac{1}{2}-a+\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)+2^2\times\frac{a}{2}=1+\frac{3}{2}a$,

则 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1+\frac{3}{2}a-\frac{25a^2}{4}=-\frac{25}{4}\left(a-\frac{3}{25}\right)^2+\frac{109}{100}$,

因为 $0<a<\frac{1}{2}$,所以当 $D(X)$ 最大时,

$a=\frac{3}{25}$. 故选 D.

3. 0.7　0.21 【解析】由题意得 $P(X=1)+P(X=0)=1$,因为 $P(X=1)-P(X=0)=0.4$,所以解得 $P(X=1)=0.7$,$P(X=0)=0.3$,所以 $E(X)=P(X=1)=0.7$,$D(X)=0.7\times0.3=0.21$.

4. $\frac{1}{2}$ 【解析】依题意有

$$\begin{cases}\frac{1}{12}+m+\frac{7}{12}+n=1,\\ 1\times\frac{1}{12}+2m+3\times\frac{7}{12}+4n=\frac{17}{6},\end{cases}$$

解得 $m=n=\frac{1}{6}$，

则 $2m+n=2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{4}$　【解析】事件 A 在一次试验中发生的次数 X 服从两点分布，故方差 $D(X)=p(1-p)=p-p^2=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，所以当 $p=\frac{1}{2}$时，方差取得最大值 $\frac{1}{4}$.

6.【解】(1)记“甲同学投篮 4 次，恰好投中 2 次”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$.

(2)X 的所有可能取值为 2,3,4,

$P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

$P(X=3)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$，

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=1-\frac{4}{9}-\frac{4}{27}=\frac{11}{27}$，

故 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{11}{27}$

数学期望 $E(X)=2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{4}{27}+4\times\frac{11}{27}=\frac{80}{27}$，

方差 $D(X)=\left(2-\frac{80}{27}\right)^2\times\frac{4}{9}+\left(3-\frac{80}{27}\right)^2\times\frac{4}{27}+\left(4-\frac{80}{27}\right)^2\times\frac{11}{27}=\frac{620}{729}$.

7. A　【解析】根据分布列的性质可得 $\frac{1}{6}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$，即 $b=\frac{1}{3}$.

由 $E(12X)=7$，故 $12E(X)=7$，即 $12\cdot\left(-\frac{1}{6}+0+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\times2\right)=7$，解得 $a=1$

$\left(\text{另解：}E(12X)=-12\times\frac{1}{6}+12a\times\frac{1}{4}+24\times\frac{1}{4}=7\text{，解得 }a=1\right)$，$E(X)=\frac{7}{12}$.

$D(X)=\frac{1}{6}\times\left(-1-\frac{7}{12}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(0-\frac{7}{12}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{7}{12}\right)^2+\frac{1}{4}\times\left(2-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{155}{144}$ $\left(\text{另解：}E(X^2)=1\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{17}{12}\text{，}D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{17}{12}-\frac{49}{144}=\frac{155}{144}\right)$，

所以 $D(2X+3)=2^2\cdot D(X)=4\times\frac{155}{144}=\frac{155}{36}$. 故选 A.

8. D 【解析】由题可知，$\frac{1}{2}<p<1$，$E(\xi)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，$E(\eta)=p-1+p=2p-1$，$E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)=2p-\frac{4}{3}$，$D(\xi)=\left(-1+\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$，$D(\eta)=(-2p)^2(1-p)+(2-2p)^2p=4p-4p^2$，$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)=4p-4p^2+\frac{8}{9}=-4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{9}$. 所以当 p 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内逐渐增大时，$E(\xi+\eta)$ 逐渐增大，$D(\xi+\eta)$ 逐渐减小，故选 D.

9. AD 【解析】$\because 2b+b-a+a=3b=1$，

$\therefore b=\frac{1}{3}$，$\therefore E(X)=(-2)\times\frac{2}{3}+(-1)\times\left(\frac{1}{3}-a\right)+0\times a=a-\frac{5}{3}$，

$\therefore D(X)=\left(-2-a+\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(-1-a+\frac{5}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}-a\right)+\left(0-a+\frac{5}{3}\right)^2a=-a^2+\frac{7}{3}a+\frac{2}{9}$.

又$\because Y=3X+2$，$\therefore E(Y)=3E(X)+2=3a-3$，$D(Y)=9D(X)=-9a^2+21a+2$.

$\therefore$ 当 a 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上增大时，$E(Y)$ 增

大.

$\because$ 函数 $y=-9a^2+21a+2$ 在 $\left(-\infty,\frac{7}{6}\right)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 a 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上增大时,$D(Y)$ 增大. 故选 AD.

10. 16　1 536　【解析】由题得 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{15}+50\times\frac{2}{15}+60\times\frac{1}{15}=16$,

$D(X)=(0-16)^2\times\frac{1}{3}+(10-16)^2\times\frac{2}{5}+(20-16)^2\times\frac{1}{15}+(50-16)^2\times\frac{2}{15}+(60-16)^2\times\frac{1}{15}=384$.

因为 $Y=2X-E(X)=2X-16$,

所以 $E(Y)=E(2X-16)=2E(X)-16=16$,

$D(Y)=D(2X-16)=2^2D(X)=4\times384=1\ 536$.

11.【解】(1) 依题意知,X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$,

$D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{8}{15}+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{16}{45}$.

(2) 设 1 名女教师参加活动可获得的分数为 X_1,1 名男教师参加活动可获得的分数为 X_2,则 X_1 的所有可能取值为 3,6,X_2 的所有可能取值为 6,9,

$P(X_1=3)=P(X_1=6)=\frac{1}{2}$,$E(X_1)=3\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$,

$P(X_2=6)=P(X_2=9)=\frac{1}{2}$,$E(X_2)=$

$6\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$,

若有 X 名女教师参加活动,则有$(2-X)$名男教师参加活动,$Y=\frac{9}{2}X+\frac{15}{2}(2-X)=15-3X$,所以 $E(Y)=E(15-3X)=15-3E(X)=15-3\times\frac{2}{3}=13$.

即 2 人得分之和的期望为 13.

12.【解】(1)从这 6 名密切接触者中随机抽取 3 名,共有 C_6^3 种选法.

抽到感染者,并从余下 5 名该疾病的病毒密切接触者中,再抽 2 人,有 C_5^2 种选法.

故抽到感染者的概率 $P=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$.

(2)①ξ 的所有可能取值为 1,2,3,4,5,$P(\xi=1)=\frac{C_1^1}{C_6^1}=\frac{1}{6}$,$P(\xi=2)=\frac{C_5^1C_1^1}{A_6^2}=\frac{1}{6}$,$P(\xi=3)=\frac{A_5^2C_1^1}{A_6^3}=\frac{1}{6}$,$P(\xi=4)=\frac{A_5^3C_1^1}{A_6^4}=\frac{1}{6}$,$P(\xi=5)=\frac{A_5^4C_1^1}{A_6^5}+\frac{A_5^5}{A_6^5}=\frac{1}{3}$,故 X 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

则数学期望 $E(\xi)=\frac{1}{6}\times1+\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times3+\frac{1}{6}\times4+\frac{1}{3}\times5=\frac{10}{3}$.

②首先考虑(3,3)分组,所需化验次数为 η,η 的可能取值是 2,3,$P(\eta=2)=\frac{C_1^1}{C_2^1}\times\frac{C_1^1}{C_3^1}+\frac{C_1^1}{C_2^1}\times\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{1}{3}$,$P(\eta=3)=1-P(\eta=2)=\frac{2}{3}$,

所以 η 的分布列为

η	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

数学期望 $E(\eta)=\frac{1}{3}\times2+\frac{2}{3}\times3=\frac{8}{3}$.

再考虑(2,2,2)分组,所需化验次数为 δ,δ 的可能取值是 2,3,

$P(\delta=2)=\frac{C_1^1}{C_3^1}\times\frac{C_1^1}{C_2^1}+\frac{C_1^1}{C_3^1}\times\frac{C_1^1}{C_2^1}=\frac{1}{3}$,

$P(\delta=3)=1-P(\delta=2)=\frac{2}{3}$,

所以 δ 的分布列为

δ	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

数学期望 $E(\delta)=\frac{1}{3}\times2+\frac{2}{3}\times3=\frac{8}{3}$.

因为 $E(\eta)=E(\delta)$,

所以按(2,2,2)或(3,3)分组进行化验均可.

13. $m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$ 【解析】定义随机变量 X_i,其中 $i=1,2,\cdots,m(i\leqslant m)$,当 $X_i=1$ 时,表示第 i 个盒子中有球;当 $X_i=0$ 时,表示第 i 个盒子中没有球,则装有球的盒子个数 $X=X_1+X_2+\cdots+X_m$.

又第 i 个盒子无球的概率 $P(X_i=0)=\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$,第 i 个盒子有球的概率 $P(X_i=1)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$,

故 $E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$,所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{m}E(X_i)=m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$,

即装有球的盒子的个数的期望是 $m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$.

7.4 二项分布与超几何分布

7.4.1 二项分布+
7.4.2 超几何分布

1. D 【解析】甲、乙两人各自解题是相互独立事件,又知每局中甲、乙两人赢的概率相同,即甲赢的概率为 $\frac{1}{2}$,甲输的概率为 $\frac{1}{2}$.

则甲获胜且比赛恰好进行了 4 局的比赛情况是:甲在前 3 局中赢了 2 局,第 4 局赢了,

其概率是 $C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$. 故选 D.

2. D 【解析】由题可知,当 4 名员工中有 3 人或 4 人休假时,两家店铺至少有一家不能正常营业. 设"两家店铺至少有一家不能正常营业"为事件 A. 有 4 人休假的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$,有 3 人休假的概率为 $C_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$,所以两家店铺至少有一家不能正常营业的概率 $P(A)=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$,所以两家店铺在该节假日都能正常营业的概率为 $1-P(A)=\frac{8}{9}$.

故选 D.

3. BC 【解析】因为每一局甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$,乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$,若比赛采用"三局两胜"制,甲胜的情况为连胜两局结束比赛或前两局中胜一局并且第三局胜结束比赛,其概率 $P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{27}$,乙胜的概率为 $1-\frac{20}{27}=\frac{7}{27}$,故 A 错误,B 正确;若采用"五局三胜"制,则甲胜的情况为连续三局获胜结束比赛,前三局有两局胜且第四局胜结束比赛,前四局有两局胜且第五局胜结束比赛,其概率 $P_2=\left(\frac{2}{3}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{64}{81}$,乙胜的概率为 $1-\frac{64}{81}=\frac{17}{81}$,故 C 正确,D 错误.

故选 BC.

4.【解】(1) 甲参加的三个项目全部通过,所花费用为 0 的概率 $P_1=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$;

甲参加的三个项目中有一个没有通过,所花费用为 1 000 元的概率 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$,

所以甲获得资格证书所花费用不超过 1 000 元的概率为 $P_1+P_2=\frac{17}{24}$.

(2) 由(1)知,不需要学习培训就获得

资格证书的概率为$\frac{1}{4}$,

X 的可能取值为 0,1,2,3,显然 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$,

$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$,

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$,

$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

均值 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,方差 $D(X)=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

5.【解】(1)由题意知,X 的可能取值为 0,1,2,则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{6}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

均值 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$.

(2)设第一次从甲袋中随机摸出 1 个球,摸出的是 1,2,3 号球对应的事件分别为 A_1,A_2,A_3,

设第二次摸到的是 3 号球为事件 B,则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$,

$P(B|A_1)=P(B|A_2)=\frac{1}{4}$,$P(B|A_3)=\frac{2}{7}$,所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{29}{112}$.

故第二次摸到的是 3 号球的概率为$\frac{29}{112}$.

6. B 【解析】依题意,$P_k=C_n^k\times0.8^k\times$

0.2^{n-k}, $k=0,1,2,\cdots,n$，由 P_7 是唯一的最大值，得 $\begin{cases}P_7>P_6,\\P_7>P_8,\end{cases}$

即 $\begin{cases}C_n^7\times0.8^7\times0.2^{n-7}>C_n^6\times0.8^6\times0.2^{n-6},\\C_n^7\times0.8^7\times0.2^{n-7}>C_n^8\times0.8^8\times0.2^{n-8},\end{cases}$

则

$$\begin{cases}\dfrac{n!}{7!\ (n-7)!}\times0.8>\dfrac{n!}{6!\ (n-6)!}\times0.2,\\\dfrac{n!}{7!\ (n-7)!}\times0.2>\dfrac{n!}{8!\ (n-8)!}\times0.8,\end{cases}$$

整理得 $\begin{cases}4(n-6)>7,\\4(n-7)<8,\end{cases}$

解得 $\dfrac{31}{4}<n<9$，

而 $n\in\mathbf{N}^*$，因此 $n=8$，所以 $E(X)=8\times0.8=6.4$.

7. 8 【解析】设射箭命中靶心的次数为 X，$\because$ 射箭命中靶心的次数 X 服从参数为 10，$\dfrac{3}{4}$ 的二项分布，

即 $X\sim B\left(10,\dfrac{3}{4}\right)$，

$\therefore P(X=k)=C_{10}^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10-k}$，$k=0,1,2,\cdots,10$.

设最有可能命中 m 次，即命中 m 次的概率最大，则 $C_{10}^m\left(\dfrac{3}{4}\right)^m\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10-m}\geqslant C_{10}^{m-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{m-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{11-m}$ 且 $C_{10}^m\left(\dfrac{3}{4}\right)^m\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10-m}\geqslant C_{10}^{m+1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{m+1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{9-m}$，$m\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m\leqslant9$，解得 $7.25\leqslant m\leqslant8.25$，

$\because m\in\mathbf{N}^*$，$\therefore m=8$.

8.【解】(1) 由题意，利用频率分布直方图的性质，可得 $(0.025+a+0.175+0.125\times2)\times2=1$，

解得 $a=0.050$，

则这一个月内完成的 1 000 次咖啡二段萃取时间在 $[102,104)$ 内的次数为 $1\ 000\times0.05\times2=100$.

(2) 由 (1) 知，前两组的频率之和为 $(0.025+0.05)\times2=0.15$，

前三组的频率之和为 $(0.025+0.05+0.175)\times2=0.5$，

所以估计中位数为 106，即这 1 000 次咖啡二段萃取时间的中位数约为 106 s.

估计平均数为 $101\times0.05+103\times0.1+105\times0.35+(107+109)\times0.25=106.1$.

即这 1 000 次咖啡二段萃取时间的平均数约为 106.1 s.

(3)由题图知,萃取时间超过 108 s 的频率为 $0.125\times2=0.25$,

设抽取 3 次中萃取时间超过 108 s 的次数为 X,$X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$,

所以 $P(X\geqslant2)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{5}{32}$.

故至少有 2 次萃取时间超过 108 s 的概率为$\frac{5}{32}$.

9.【解】(1)由题意可得,$(0.010+m+0.020+0.030+0.025)\times10=1$,

解得 $m=0.015$.

(2)由(1)知,评分在[60,70)内的观众人数为 $100\times0.15=15$,

评分在[70,80)的观众人数为 $100\times0.2=20$.

按照比例分配的分层随机抽样的方法,从评分在[60,70)和[70,80)内的观众中抽取 7 人,则评分在[60,70)内的观众人数为 3,在[70,80)内的观众人数为 4.

所以 X 的可能取值为 0,1,2,3.

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$,$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$,$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

所以 $E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$.

$D(X)=\left(0-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{4}{35}+\left(1-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{18}{35}+\left(2-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{12}{35}+\left(3-\frac{9}{7}\right)^2\times\frac{1}{35}=$

$\frac{81}{49}\times\frac{4}{35}+\frac{4}{49}\times\frac{18}{35}+\frac{25}{49}\times\frac{12}{35}+\frac{144}{49}\times\frac{1}{35}=$

$\frac{24}{49}$.

10.【解】(1)记该企业员工上半年每周户外活动时间在$[4,6)$,$[8,10)$小时的频率分别为m,n,

则 $m=\frac{1\ 050}{3\ 000}-0.2=0.15$, $n=\frac{3\ 000-1\ 050}{3\ 000}-0.3-0.1=0.25$,

故所求平均数为$3\times0.2+5\times0.15+7\times0.3+9\times0.25+11\times0.1=6.8$(小时).

(2)每周户外活动时间在$[4,6)$,$[6,8)$,$[8,10)$小时的频率之比为$0.15:0.3:0.25=3:6:5$,

所以14人中每周户外活动时间在$[4,6)$小时的人数为$\frac{3}{14}\times14=3$,在$[6,8)$小时的人数为$\frac{6}{14}\times14=6$,

在$[8,10)$小时的人数为$\frac{5}{14}\times14=5$,

则X的可能取值为$0,1,2,3,4$,

所以$P(X=0)=\frac{C_9^4}{C_{14}^4}=\frac{18}{143}$,$P(X=1)=\frac{C_9^3C_5^1}{C_{14}^4}=\frac{60}{143}$,$P(X=2)=\frac{C_9^2C_5^2}{C_{14}^4}=\frac{360}{1\ 001}$,

$P(X=3)=\frac{C_9^1C_5^3}{C_{14}^4}=\frac{90}{1\ 001}$,$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_{14}^4}=\frac{5}{1\ 001}$,

故X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{18}{143}$	$\frac{60}{143}$	$\frac{360}{1\ 001}$	$\frac{90}{1\ 001}$	$\frac{5}{1\ 001}$

故$E(X)=4\times\frac{5}{14}=\frac{10}{7}$.

(3)从每周户外活动时间在$[4,10)$小时的员工中随机抽取20人,每周户外活动时间在$[8,10)$小时的概率$p=\frac{0.25}{0.15+0.3+0.25}=\frac{5}{14}$,

则$p(k)=C_{20}^kp^k(1-p)^{20-k}=\frac{C_{20}^k5^k9^{20-k}}{14^{20}}$,

故 $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}=\dfrac{\dfrac{C_{20}^{k+1}5^{k+1}9^{19-k}}{14^{20}}}{\dfrac{C_{20}^{k}5^{k}9^{20-k}}{14^{20}}}=\dfrac{5}{9}\times$

$\dfrac{\dfrac{20!}{(k+1)!\,(19-k)!}}{\dfrac{20!}{k!\,(20-k)!}}=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{20-k}{k+1}\leqslant1$,

解得 $k\geqslant\dfrac{13}{2}=6.5$，所以当 $k=7$ 时，

$p(k)$ 最大，

故 $p(k)$ 最大时，k 的值为 7.

7.5 正态分布

1. C 【解析】由 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$，$x\in\mathbf{R}$ 知 $\mu=1$，则 $E(X)=1$，所以 $E(2X+1)=2E(X)+1=3$. 故选 C.

2. A 【解析】随机变量 $X\sim N(5,1)$，且 $P(4<X<6)=m$，$P(3<X<7)=n$，

$\therefore P(5<X<6)=\dfrac{m}{2}$，$P(3<X<5)=\dfrac{n}{2}$，

$\therefore P(3<X<6)=\dfrac{m+n}{2}$.

3. AD 【解析】由题知正态分布 $N(4,4)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称，故 $2-3m+m^2+6=8$，即 $m^2-3m=0$，解得 $m=0$ 或 $m=3$. 故选 AD.

4. B 【解析】因为 $X\sim N(100,a^2)$，

$P(X\leqslant90)=\dfrac{1}{10}$，

所以 $P(X\leqslant90)=P(X\geqslant110)=\dfrac{1}{10}$，所以 $P(90<X<110)=1-2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$，

所以 $P(100<X<110)=\dfrac{2}{5}$.

5. C 【解析】根据题意得 $P\left(|X_n|\geqslant\dfrac{1}{4}\right)\leqslant0.0027$，则 $P\left(|X_n|<\dfrac{1}{4}\right)\geqslant1-0.0027=0.9973$，

即 $P\left(-\dfrac{1}{4}<X_n<\dfrac{1}{4}\right)\geqslant0.9973$. 因为 $\mu=0$，且当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$P(-3\sigma\leqslant X\leqslant3\sigma)\approx0.9973$，

所以 $3\sigma\leqslant\dfrac{1}{4}$，所以 $\sqrt{\dfrac{2}{n}}\leqslant\dfrac{1}{12}$，解得

$n \geqslant 288$，所以至少要测量的次数为 288.

6. B 【解析】因为整个年级成绩的平均分为 470，标准差为 50，

所以 $\mu = 470$，$\sigma = 50$，则学生的成绩 $Z \sim N(470, 50^2)$，设 $Z_1 \sim N(0, 1)$，则 $P(395 < Z < 545) = P\left(\frac{395-470}{50} < Z_1 < \frac{545-470}{50}\right) = P(-1.5 < Z_1 < 1.5)$.

由 $\Phi(1.5) \approx 0.9332$，

得 $P(Z_1 < 1.5) \approx 0.9332$，

所以 $P(-1.5 < Z_1 < 1.5) = 2[P(Z_1 < 1.5) - 0.5] \approx 0.8664$，

故成绩落在区间 $(395, 545)$ 内的人数大约为 $1500 \times 0.8664 \approx 1300$. 故选 B.

7. 【解】(1) 样本平均数 $\bar{x} = (5 \times 0.010 + 15 \times 0.020 + 25 \times 0.030 + 35 \times 0.025 + 45 \times 0.015) \times 10 = 26.5$.

(2) 由 (1) 可知 $\mu = \bar{x} = 26.5$，从而 $Z \sim N(26.5, 10^2)$，

$\therefore P(26.5 \leqslant Z \leqslant 46.5) = P(\mu \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma \leqslant Z \leqslant \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.9545 = 0.47725$，

$\therefore Z$ 落在 $[26.5, 46.5]$ 内的概率约为 0.47725.